



*Ministero dell' Istruzione, dell' Università e della Ricerca*  
**I043 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Indirizzi:** LI02, EA02 – SCIENTIFICO  
 LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE  
 (Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

**Tema di:** MATEMATICA

*Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.*

**PROBLEMA 1**

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (figura 1). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura 2 è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano  $Oxy$ : il quadrato di lato  $DE = 2$  (in opportune unità di misura) e di centro  $C$  rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione  $f(x)$  rappresenta il profilo della pedana.



Figura 1

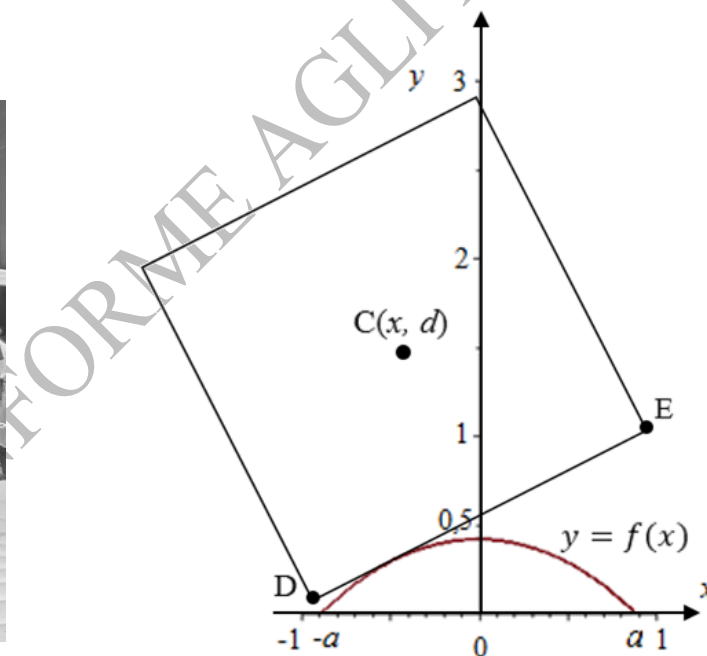


Figura 2

- 1) Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per  $x \in [-a; a]$ ; determina inoltre il valore degli estremi  $a$  e  $-a$  dell'intervallo.



*Ministero dell' Istruzione, dell' Università e della Ricerca*

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione  $f(x)$  relativo all'intervallo  $[-a; a]$ , come mostrato in figura 3.

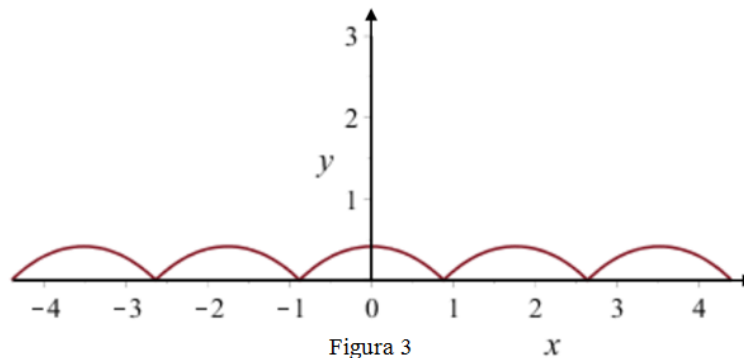


Figura 3

- 2) Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:
- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
  - la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una “gobba”, cioè dell’arco di curva di equazione  $y = f(x)$  per  $x \in [-a; a]$ .

Stabilisci se tali condizioni sono verificate.<sup>1</sup>

- 3) Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli  $ACL$  e  $ALM$  in figura 4, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell’ordinata  $d$  del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

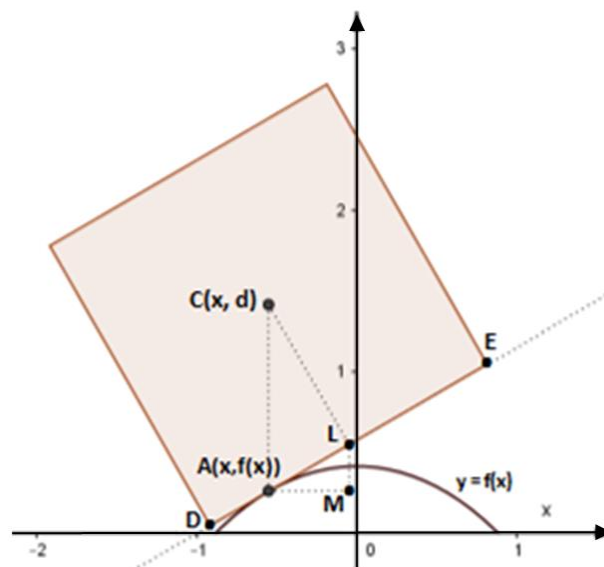


Figura 4

<sup>1</sup>In generale, la lunghezza dell’arco di curva avente equazione  $y = \varphi(x)$  compreso tra le ascisse  $x_1$  e  $x_2$  è data da  $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$ .



*Ministero dell' Istruzione, dell' Università e della Ricerca*

Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{per } x \in \left[-\frac{\ln(3)}{2}; \frac{\ln(3)}{2}\right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4) Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

**PROBLEMA 2**

Consideriamo la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , periodica di periodo  $T = 4$  il cui grafico, nell'intervallo  $[0; 4]$ , è il seguente:

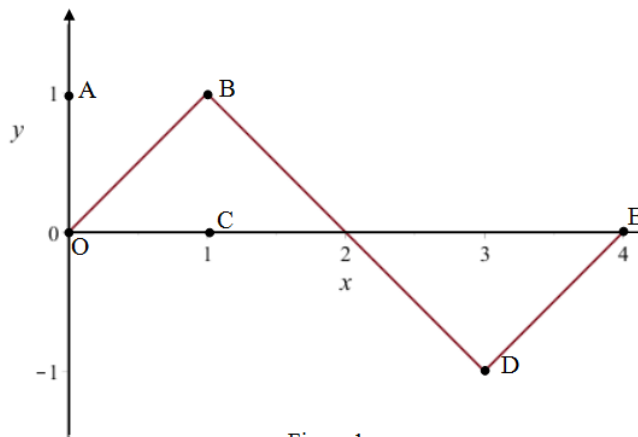


Figura 1

Come si evince dalla figura 1, i tratti  $OB, BD, DE$  del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate:  $O(0, 0), B(1, 1), D(3, -1), E(4, 0)$ .

1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione  $f$  è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ; qualora esistano, determinane il valore.

Rappresenta inoltre, per  $x \in [0; 4]$ , i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

2) Considera la funzione:

$$s(x) = \text{sen}(bx)$$

con  $b$  costante reale positiva; determina  $b$  in modo che  $s(x)$  abbia lo stesso periodo di  $f(x)$ .



*Ministero dell' Istruzione, dell' Università e della Ricerca*

Dimostra che la porzione quadrata di piano  $OABC$  in figura 1 viene suddivisa dai grafici di  $f(x)$  e  $s(x)$  in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato  $OABC$  ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3) Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \quad \text{e} \quad s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4) Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse  $y$  della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione  $h$  per  $x \in [0; 3]$  e l'asse delle  $x$ .

**QUESTIONARIO**

1. Definito il numero  $E$  come:

$$E = \int_0^1 x e^x dx,$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x dx$$

in termini di  $e$  ed  $E$ .

2. Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma emisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei  $3/5$  del volume della semisfera.

3. Sapendo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 2b} - 6}{x} = 1$$

determinare i valori di  $a$  e  $b$ .

4. Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo  $[0, 2]$  viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia  $4/3$ ?

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

5. Dati i punti  $A(-2, 3, 1)$ ,  $B(3, 0, -1)$ ,  $C(2, 2, -3)$ , determinare l'equazione della retta  $r$  passante per  $A$  e per  $B$  e l'equazione del piano  $\pi$  perpendicolare ad  $r$  e passante per  $C$ .

6. Determinare il numero reale  $a$  in modo che il valore di

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

7. Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio  $\sqrt{6}$  tangenti al piano  $\pi$  di equazione:

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

nel suo punto  $P$  di coordinate  $(1, 0, 2)$ .

8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità  $p$  doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di  $p$  in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

9. Dimostrare che l'equazione:

$$\operatorname{arctg}(x) + x^3 + e^x = 0$$

ha una e una sola soluzione reale.

10. Data la funzione:

$$f(x) = |4 - x^2|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo  $[-3; 3]$  e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo  $[-3; 3]$  in cui la derivata prima di  $f(x)$  si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.