Sessione ordinaria 2017
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

X02Z – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LIB2 – SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE TEDESCA

EA10 - ESABAC - SCIENTIFICO INTERNAZIONALE FRANCESE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione g_λ è così definita:

$$g_\lambda(x) = \frac{x-2}{x^2-\lambda}$$

e si indica con Γ_λ il suo grafico, in un riferimento cartesiano Oxy.

1. Traccia i seguenti grafici: Γ_{-5} Γ_0 Γ_3 Γ_4 Γ_9.
2. Stabilisci, al variare di λ in $\mathbb{R}$, se vi sono, e quanti sono, gli asintoti verticali e se vi sono massimi o minimi. Descrivi quindi, a seconda del valore di λ, qual è l'andamento della funzione g_λ, tracciandone un diagramma indicativo.
3. Dimostra che, per qualunque λ diverso da 0 da 4, la retta passante per i punti di intersezione tra Γ_λ e gli assi cartesiani è tangente a Γ_λ nel suo punto di ascissa nulla.
4. Detti A e B i punti di intersezione tra Γ_9 e gli assi cartesiani, sia $\mathcal{G}$ la regione piana delimitata dai segmenti OA e OB e dall'arco di Γ_9 di estremi A e B. Determina l'area di $\mathcal{G}$ e il volume del solido generato dalla rotazione di $\mathcal{G}$ attorno all'asse y.

PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:

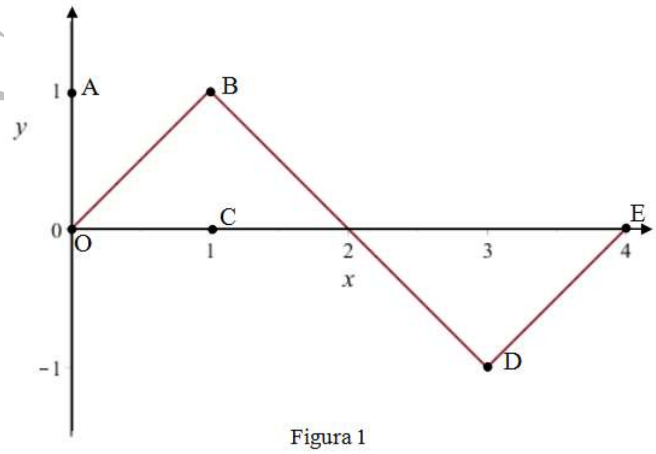

Figura 1

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Come si evince dalla figura 1, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0,0)$, $B(1,1)$, $D(3,-1)$, $E(4,0)$.

1. Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; qualora esistano, determinane il valore. Rappresenta inoltre, per $x \in [0;4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

2. Considera la funzione:

$$s(x) = sen(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$. Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3. Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \quad \text{e} \quad s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4. Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0;3]$ e l'asse delle x.

QUESTIONARIO

1. Definito il numero E come:

$$E = \int_0^1 xe^x dx,$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x dx$$

in termini di e ed E.

Sessione ordinaria 2017
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

2. Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei 3/5 del volume della semisfera.

3. Sapendo che:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x}=1$$
determinare i valori di a e b.

4. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:
$$f(x)=sen(x)+cos(x)$$
nel punto di ascissa $x_0=\pi$.

5. Determinare il numero reale a in modo che il valore di
$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^a}$$
sia un numero reale non nullo.

6. Stabilire se la funzione:
$$f(x)=\frac{x+2\sqrt{2}}{x^2-8}$$
è continua nell'intervallo $[-3,-1]$ e se, nello stesso intervallo, è dotata di minimo e massimo assoluto.

7. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

8. Data la funzione:
$$f(x)=|4-x^2|$$
verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3;3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3;3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 257 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.