

## CORSO SPERIMENTALE

**Indirizzo:** PIANO NAZIONALE INFORMATICO

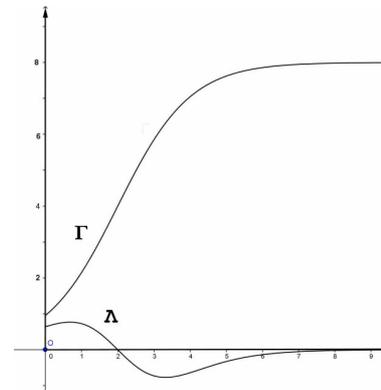
**Tema di:** MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.*

**PROBLEMA 1**

Una funzione  $f(x)$  è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in  $[0, +\infty[$  e nella figura sono disegnati i grafici  $\Gamma$  e  $\Lambda$  di  $f(x)$  e della sua derivata seconda  $f''(x)$ . La tangente a  $\Gamma$  nel suo punto di flesso, di coordinate  $(2; 4)$ , passa per  $(0; 0)$ , mentre le rette  $y = 8$  e  $y = 0$  sono asintoti orizzontali per  $\Gamma$  e  $\Lambda$ , rispettivamente.

- 1) Si dimostri che la funzione  $f'(x)$ , ovvero la derivata prima di  $f(x)$ , ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni  $x$  del dominio è:  $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$ , qual è un possibile andamento di  $f'(x)$ ?
- 2) Si supponga che  $f(x)$  costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che  $\Gamma$  presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?



- 3) Se  $\Gamma$  è il grafico della funzione  $f(x) = \frac{a}{1 + e^{b-x}}$ , si provi che  $a = 8$  e  $b = 2$ .
- 4) Nell'ipotesi del punto 3), si calcoli l'area della regione di piano delimitata da  $\Lambda$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo  $[0, 2]$ .

**PROBLEMA 2**

Sia  $f$  la funzione definita per tutti gli  $x$  positivi da  $f(x) = x^3 \ln x$ .

1. Si studi  $f$  e si tracci il suo grafico  $\gamma$  su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici  $Oxy$ ; accertato che  $\gamma$  presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.
2. Sia  $P$  il punto in cui  $\gamma$  interseca l'asse  $x$ . Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse  $y$ , passante per l'origine e tangente a  $\gamma$  in  $P$ .
3. Sia  $R$  la regione delimitata da  $\gamma$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo aperto a sinistra  $]0, 1]$ . Si calcoli l'area di  $R$ , illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in  $mm^2$  avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 decimetro.
4. Si disegni la curva simmetrica di  $\gamma$  rispetto all'asse  $y$  e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di  $\gamma$  rispetto alla retta  $y = -1$ .

**QUESTIONARIO**

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.
2. Se la funzione  $f(x) - f(2x)$  ha derivata 5 in  $x = 1$  e derivata 7 in  $x = 2$ , qual è la derivata di  $f(x) - f(4x)$  in  $x = 1$ ?
3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti  $A(2; -1)$  e  $B(-6; -8)$ . Si determini l'equazione della retta passante per  $B$  e avente distanza massima da  $A$ .
4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza  $h$  e i lati  $a$  e  $b$  delle due basi. Si esprima il volume  $V$  del tronco in funzione di  $a$ ,  $b$  e  $h$ , illustrando il ragionamento seguito.
5. In un libro si legge: *“se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento della temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p.es. 0,38%), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell'1,14%), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di 0,76%)”*. È così? Si motivi esaurientemente la risposta.
6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare  $7! = 5040$  numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione?
7. In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Quale è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?
8. Si mostri, senza utilizzare il teorema di *l'Hôpital*, che:
$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin \pi}}{x - \pi} = -1$$
9. Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.
10. Si stabilisca per quali valori  $k \in \mathbb{R}$  l'equazione  $x^2(3 - x) = k$  ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo  $[0, 3]$ . Posto  $k = 3$ , si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.