Sessione ordinaria 2009
Seconda prova scritta

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

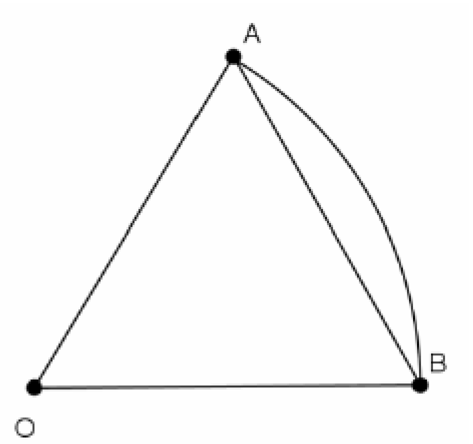
PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare *AOB* di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

1. Si provi che l'area *S* compresa fra l'arco e la corda *AB* è espressa, in funzione di x, da $S(x)=\frac{1}{2}\, r^2(x-\operatorname{sen}x)$ *con* $x \in [0, 2\pi]$.

2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).

3. Si fissi l'area del settore *AOB* pari a 100 m^5. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di *AOB* e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).



4. Sia $r = 2$ e $x = \pi/3$. Il settore AOB è la base di un solido *W* le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad *OB* sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di *W*.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log x$ (*logaritmo naturale*)

1. Sia *A* il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto *P*. Sia *B* il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per *P* all'asse x . Si dimostri che, qualsiasi sia *P*, il segmento *AB* ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x)=\log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?

2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$?

3. Sia **D** la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di **D**.

4. Si calcoli il volume del solido generato da **D** nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.

QUESTIONARIO

1. Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è sen x e il cui grafico passa per il punto (0, 2).

2. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili *applicazioni* (o *funzioni*) di A in B, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?

3. Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

4. *"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1};\ \frac{0}{0};\ \frac{1}{0};\ 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Si calcoli:	$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

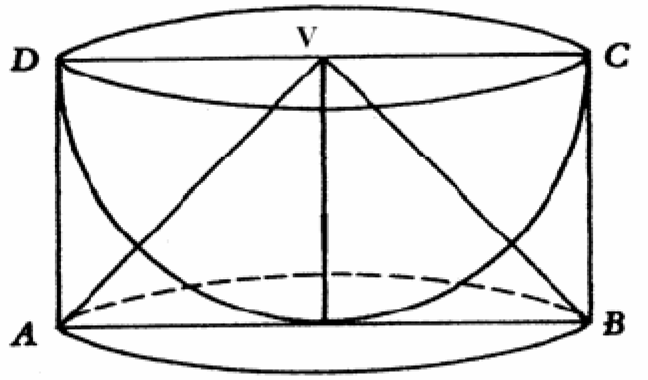
7. Si dimostri l'identità	$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$	con n e k naturali e $n > k$.

8. Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0$$

ha una sola radice compresa fra -1 e 0.

9. Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, Galileo Galilei descrive la



costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio *r* e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.
Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

10. Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$