

**X02X – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**
**Indirizzi:** IA48 – SCIENTIFICO INTERNAZIONALE - OPZIONE ITALO-INGLESE

LIA2 - SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE SPAGNOLA

**Tema di:** MATEMATICA, MATEMATICA E INFORMATICA

*Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.*
**PROBLEMA 1**

La funzione derivabile  $y = f(x)$  ha, per  $x \in [-3, 3]$ , il grafico  $\Gamma$ , disegnato in figura 1.  $\Gamma$  presenta tangenti orizzontali per  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ . Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia  $g(x)$  una primitiva di  $f(x)$  tale che  $g(3) = -5$ .

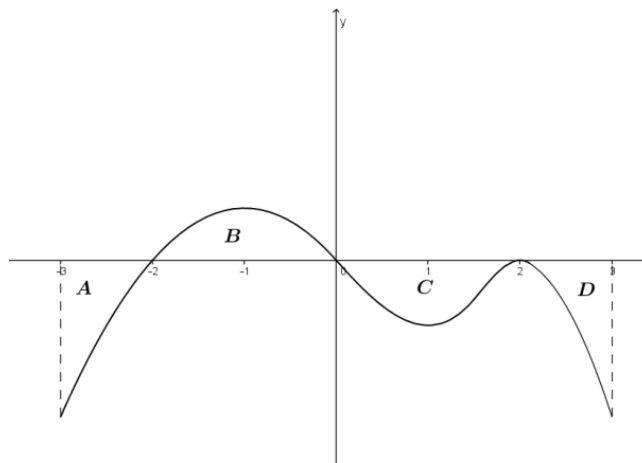


Figura 1

1. Nel caso  $f(x)$  fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di  $x \in [-3, 3]$ , per cui  $g(x)$  ha un massimo relativo e determina i valori di  $x$  per i quali  $g(x)$  volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola  $g(0)$  e, se esiste, il  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+g(x)}{2x}$ .
4. Sia  $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$ , determina il valore di  $\int_{-2}^1 h(x) dx$ .



**X02X – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Indirizzi:** IA48 – SCIENTIFICO INTERNAZIONALE - OPZIONE ITALO-INGLESE

LIA2 - SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE SPAGNOLA

**Tema di:** MATEMATICA, MATEMATICA E INFORMATICA

**PROBLEMA 2**

Assegnate le funzioni reali  $f(x) = \ln(x)$  e  $g(x) = e^{x-2}$ , e indicati con  $F$  e  $G$  i loro grafici in un riferimento cartesiano  $Oxy$ :

1. stabilisci dominio e codominio delle funzioni  $f$  e  $g$ , e traccia quindi i grafici relativi alle funzioni  $a(x) = f(g(x))$  e  $b(x) = g(f(x))$ ;
2. determina l'equazione della retta  $r$ , tangente a  $F$  nel suo punto di ascissa  $e^2$ . Stabilisci inoltre se esiste una retta  $s$ , parallela a  $r$ , che sia tangente a  $G$ ;
3. determina l'equazione della retta  $t$ , parallela alla bisettrice del primo quadrante, che sia tangente a  $F$ . Dimostra che  $t$  risulta essere tangente anche a  $G$ ;
4. detta  $A$  la regione piana finita delimitata dall'asse  $y$ , dalla retta di equazione  $y = x - 1$  e dal grafico  $G$ , calcola l'area di  $A$  e il volume del solido generato ruotando  $A$  intorno all'asse  $y$ .

**X02X – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE****Indirizzi:** IA48 – SCIENTIFICO INTERNAZIONALE - OPZIONE ITALO-INGLESE

LIA2 - SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE SPAGNOLA

**Tema di:** MATEMATICA, MATEMATICA E INFORMATICA**QUESTIONARIO**

1. Determinare l'espressione analitica della funzione  $y = f(x)$  sapendo che la retta  $y = -2x + 5$  è tangente al grafico di  $f$  nel secondo quadrante e che  $f'(x) = -2x^2 + 6$ .
2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula,

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove  $R$  ed  $r$  sono i raggi e  $h$  l'altezza.

3. Risolvere l'equazione:  $5 \binom{n+1}{5} = 21 \binom{n-1}{4}$ .
4. Un solido ha per base la regione  $R$  del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione  $y = \frac{1}{x^2+1}$  e l'asse delle  $x$  nell'intervallo  $[0, 3]$ . Per ogni punto  $P$  di  $R$ , di ascissa  $x$ , l'intersezione del solido col piano passante per  $P$  e ortogonale all'asse delle  $x$  è un rettangolo di altezza  $3x$ . Calcolare il volume del solido.
5. Calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2})$ .
6. Sia  $f$  la funzione, definita per tutti gli  $x$  reali, da
$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$
determinare il minimo di  $f$ .
7. Detta  $A(n)$  l'area del poligono regolare di  $n$  lati inscritto in un cerchio  $C$  di raggio  $r$ , verificare che  $A(n) = \frac{n}{2}r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$  e calcolarne il limite per  $n \rightarrow \infty$ .
8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto  $P$  all'interno del triangolo, qual è la probabilità che  $P$  disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?
9. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

determinare il parametro  $k$  in modo che nell'intervallo  $[0, 2]$  sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

10. Il grafico della funzione  $f(x) = \sqrt{x}$  ( $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ) divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici  $A(1, 0)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $C(4, 2)$  e  $D(1, 2)$ . Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.