

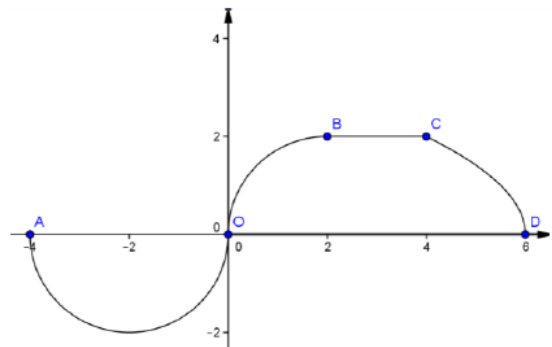
## CORSO SPERIMENTALE

**Indirizzo:** PIANO NAZIONALE INFORMATICA

**Tema di:** MATEMATICA

*Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.*
**PROBLEMA 1**

Sia  $g(x)$  una funzione continua sull'intervallo chiuso  $[-4, 6]$ . Il grafico di  $g(x)$ , disegnato a lato, passa per i punti  $A(-4; 0)$ ,  $O(0; 0)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(4; 2)$ ,  $D(6; 0)$  e consiste della semicirconferenza di diametro  $AO$ , dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi  $O$  e  $B$ , del segmento  $BC$  e dell'arco  $CD$  di una parabola avente per asse di simmetria l'asse  $x$ .

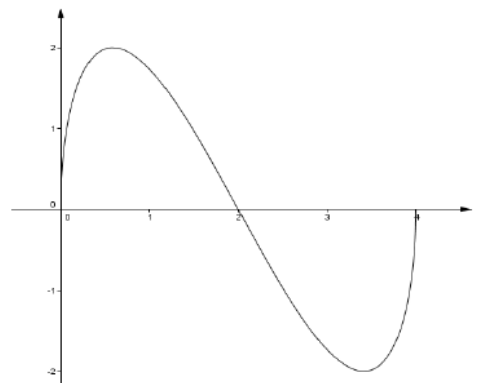


1. Si dica, giustificando la risposta, se  $g(x)$  è derivabile nei punti  $A$ ,  $O$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .
2. Posto  $f(x) = \int_{-4}^x g(t) dt$ , si calcolino:  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(4)$ ,  $f(6)$ .
3. Per quali valori di  $x \in [-4, 6]$ ,  $f(x)$  è positiva, negativa o nulla? E per quali  $x$  è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda  $f''(x)$ ?
4. La funzione  $f(x)$  presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di  $f(x)$ ?

**PROBLEMA 2**

Sia  $f(x) = (2-x)\sqrt{4x-x^2}$

1. A lato è disegnato il grafico  $\Gamma$  di  $f(x)$ . Si dimostri che  $(2; 0)$  è centro di simmetria di  $\Gamma$  e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in esso a  $\Gamma$  forma con la direzione positiva dell'asse  $x$ .
2. Si dimostri che, qualunque sia  $t$ ,  $0 < t < 2$ , le rette tangenti a  $\Gamma$  nei suoi punti di ascisse  $2+t$  e  $2-t$  sono parallele. Esistono rette tangenti a  $\Gamma$  che siano parallele alla retta  $21x + 10y + 31 = 0$ ? E che siano parallele alla retta  $23x + 12y + 35 = 0$ ?
3. Si calcoli l'area della regione compresa tra  $\Gamma$  e l'asse  $x$ .
4. Sia  $h(x) = \sin(f(x))$ . Quanti sono i punti del grafico di  $h(x)$  di ordinata 1? Il grafico di  $h(x)$  presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di  $k$  l'equazione  $h(x) = k$  ha 4 soluzioni distinte? Qual è il valore di  $\int_0^4 h(x) dx$ ?



**QUESTIONARIO**

1. Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di  $\alpha$ ?



2. Si spieghi perchè non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.
3. Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimpulso, tre palline. Si valutino le seguenti probabilità:
- esattamente una pallina è rossa
  - le tre palline sono di colori differenti.
4. Un solido  $\Omega$  ha per base la regione  $R$  delimitata dal grafico di  $f(x) = e^{1/x}$  e dall'asse  $x$  sull'intervallo  $[-2, -1]$ . In ogni punto di  $R$  di ascissa  $x$ , l'altezza del solido è data da  $h(x) = \frac{1}{x^2}$ . Si calcoli il volume del solido.
5. In un contesto di geometria non euclidea si illustri un esempio di triangolo i cui angoli non hanno somma  $180^\circ$ .
6. Si calcolino l'altezza e il raggio del massimo cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio  $\sqrt{3}$ .
7. Se  $f'(x) = \ln x - x + 2$ , per quale dei seguenti valori approssimati di  $x$ ,  $f$  ha un minimo relativo?  
 (A) 5,146      (B) 3,146      (C) 1,000      (D) 0,159      (E) 0
8. La “zara” è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella *Divina Commedia* – e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere la somma 10.
9. Le lettere  $N, Z, Q, R$  denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo  $\aleph_0$  (aleph-zero) indica la cardinalità di  $N$ . Gli insiemi  $Z, Q$  e  $R$  hanno anch'essi cardinalità  $\aleph_0$ ? Si motivi la risposta.
10. Si stabilisca per quali valori reali di  $a$  e  $b$ , si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+bx} - 2}{x} = 1$$

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.