



## CORSO DI ORDINAMENTO

**Indirizzo:** SCIENTIFICO**Tema di:** MATEMATICA

*Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario.*

**PROBLEMA 1**

Si considerino le funzioni  $f$  e  $g$  definite, per tutti gli  $x$  reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \text{ e } g(x) = \sin \pi x$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$ , si studino  $f$  e  $g$  e se ne disegnano i rispettivi grafici  $G_f$  e  $G_g$ .
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di  $G_f$  con la retta  $y = -3$ . Successivamente, si considerino i punti di  $G_g$  a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo  $[-6; 6]$  e se ne indichino le coordinate.
3. Sia  $R$  la regione del piano delimitata da  $G_f$  e  $G_g$  sull'intervallo  $[0; 2]$ . Si calcoli l'area di  $R$ .
4. La regione  $R$  rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di  $R$  a distanza  $x$  dall'asse  $y$  la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da  $h(x) = 3 - x$ . Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

**PROBLEMA 2**

Sia  $f$  la funzione definita sull'insieme  $\mathbf{R}$  dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b)^{3x} e^{-x} + 3$$

dove  $a$  e  $b$  sono due reali che si chiede di determinare sapendo che  $f$  ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che  $f(0) = 2$ .

1. Si provi che  $1 = a$  e  $1 = -b$ .
2. Si studi su  $\mathbf{R}$  la funzione  $f(x) = (x - 1)^3 + 3$  e se ne tracci il grafico  $\Gamma$  nel sistema di riferimento  $Oxy$ .
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da  $\Gamma$ , dall'asse  $y$  e dalla retta  $y = 4$ .
4. Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con  $x_i$  l'anno di osservazione e con  $y_i$  il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
$x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$y_i$	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione  $g$  definita su  $\mathbf{R}_+$  se per ciascun  $x_i$ , oggetto dell'osservazione, si ha:  $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$ . Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione  $f$  del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

**QUESTIONARIO**

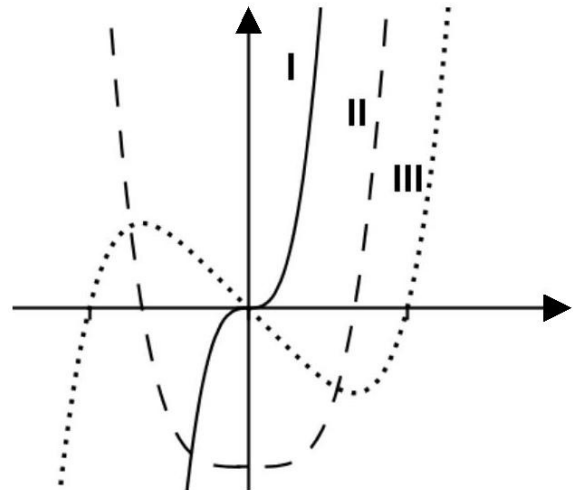
1. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
2. Si trovi il punto della curva più vicino al punto di coordinate (4; 0).  $xy =$
3. Sia  $R$  la regione delimitata dalla curva  $y = x^3$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 2$  e sia  $W$  il solido ottenuto dalla rotazione di  $R$  attorno all'asse  $y$ . Si calcoli il volume di  $W$ .
4. Il numero delle combinazioni di  $n$  oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi  $n$ .
5. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva  $y = \cos x$  e dall'asse  $x$  da  $x = 1$  a  $x = 2$  *radianti*.
6. Si calcoli  

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$$
7. Si provi che l'equazione:  $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$  ha una sola radice compresa fra  $-1$  e  $0$ .
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è così spesso citato?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione  $f$ , un altro lo è della funzione derivata  $f'$  e l'altro ancora di  $f''$ .

Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

$f$	$f'$	$f''$
A)	I	II
B)	I	III
C)	II	III
D)	III	II
E)	III	I



Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.