



CORSO DI ORDINAMENTO

**Tema di:** MATEMATICA*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.***PROBLEMA 1**

Si considerino i triangoli la cui base è  $AB = 1$  e il cui vertice  $C$  varia in modo che l'angolo  $\widehat{CAB}$  si mantenga doppio dell'angolo  $\widehat{ABC}$ .

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico  $\gamma$  descritto da  $C$ .
2. Si rappresenti  $\gamma$ , tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo  $\widehat{ACB}$  che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati  $AC$  e  $BC$  e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se  $\widehat{ACB} = 36^\circ$  allora  $AC = (\sqrt{5} - 1)/2$

**PROBLEMA 2**

Si consideri un cerchio  $C$  di raggio  $r$ .

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in  $C$  si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con  $S_n$  l'area del poligono regolare di  $n$  lati inscritto in  $C$ . Si dimostri che

$$S_n = \frac{n}{2} r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di  $n$  lati circoscritto a  $C$ .

3. Si calcoli il limite di  $S_n$  per  $n \rightarrow \infty$ .
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno

**QUESTIONARIO**

<p>1. La regione R delimitata dal grafico di <math>y = 2\sqrt{x}</math>, dall'asse x e dalla retta <math>x = 1</math> (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.</p>	
--	--

2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

3. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0$$

4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.

5. Si mostri che la funzione  $y = x^3 + 8$  soddisfa le condizioni del *teorema del valor medio* (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo  $[-2, 2]$ . Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.

6. Si sa che il prezzo  $p$  di un abito ha subito una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?

7. Se  $f(x)$  è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo  $[-2, 2]$ , che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?

Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione  $3 + f(x)$ ?

8. Si risolva l'equazione:

$$4 \binom{n}{4} = 15 \binom{n-2}{3}$$

9. Si calcoli l'integrale indefinito  $\int \sqrt{1-x^2} dx$  e, successivamente, si verifichi che il risultato di

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

è in accordo con il suo significato geometrico.

10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera  $S$  e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta  $r$  passante per il centro di  $S$ , come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?